ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

QUÁCH THỊ TẤM

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS.TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

MỞ ĐẦU

0.1 Lý do chọn đề tài

Trong chương trình toán THPT nói chung, trong các dạng toán dành cho học sinh giỏi nói riêng các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất, đặc biệt là các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất liên quan đến hình học đều là những bài toán thú vị và tương đối khó đòi hỏi học sinh không chỉ có một hệ thống kiến thức cơ bản mà còn phải có kỹ năng giải toán ở mức độ nhất định.

Hiện nay, cũng có một số tài liệu toán dành cho bồi dưỡng học sinh giỏi đã đề cập đến các bài toán cực trị hình học nhưng chưa có một tài liệu chuyên khảo nào viết về chủ đề này. Với mong muốn nghiên cứu, sưu tầm một số dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất liên quan đến hình học để trực tiếp sử dụng trong công tác giảng dạy hằng ngày và bồi dưỡng học sinh giỏi, chúng tôi chọn chủ đề về bài toán cực trị hình học trong các đề thi học sinh giỏi phổ thông để làm hướng nghiên cứu cho luận văn thạc sĩ của mình.

Luận văn có nhiệm vụ

(1). Sưu tầm một số bài toán cực trị liên quan đến hình học trong các đề thi học sinh giỏi toán quốc tế, quốc gia và trên tạp chí Toán học tuổi trẻ;

(2). Nghiên cứu các lời giải để đưa ra một sự gợi ý về các hướng giải bài toán cực trị thường gặp;

(3). Đưa ra lời giải hoặc đưa ra lời giải chi tiết hơn đối với một số bài toán mà trong tài liệu gốc chưa có lời giải hoặc mới chỉ có lời giải tóm tắt.

0.2 Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Nội dung chương 1 bao gồm quan niệm về bài toán cực trị hình học và một số hướng giải quyết bài toán cực trị hình học thường gặp trong chương trình THPT;

- Chương 2: Một số bài toán cực trị hình học

Nội dung chương 2 lần lượt trình bày các bài toán cực trị hình học trong các đề thi học sinh giỏi quốc tế, quốc gia và tạp chí Toán học tuổi trẻ và đã được em cố gắng phân loại một cách tương đối.

Do hạn chế về mặt thời gian, năng lực bản thân nên các dạng toán được trình bày trong luận văn mới chỉ là một phần rất nhỏ, minh họa cho các bài toán cực trị hình học.

Em rất mong nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của các Thầy, các Cô để bản thân em hoàn thiện nội dung luận văn để có thể tổ chức một chuyên đề về bài toán cực trị hình học để bồi dưỡng học sinh trong công việc giảng dạy của mình.

Sau cùng em chân thành cảm ơn trường ĐHKH Thái Nguyên, khoa Toán - Tin, thầy giáo PGS.TS Trịnh Thanh Hải, cùng các thầy cô giáo và các bạn đã giúp đỡ em hoàn thành luận văn này.

Học viên

Quách Thị Tấm

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Bài toán cực trị hình học

1.1.1 Bài toán cực trị hình học

Trong các bài toán hình học, có các loại bài toán có nội dung như sau: Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (như độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Đó là các bài toán cực trị hình học, nó hấp dẫn học sinh bởi vấn đề đặt ra mang tính thực tiễn: Đi tìm cái lớn nhất, nhỏ nhất, nhiều nhất, ít nhất..., chính là những cái tối ưu thường gặp trong đời sống và kĩ thuật.

Đường lối tổng quát giải bài toán cực trị hình học: Để tìm vị trí của hình H trên miềm D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất), ta phải thực hiện 2 bước sau:
Bước 1. Chứng tỏ rằng với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (hoặc $f \leq m$), với m là hằng số
Bước 2. Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

1.1.2 Ví dụ về bài toán cực trị hình học

Ví dụ 1.1. (Đề thi IMC, THCS, 2015)
E là một điểm nằm trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ sao cho $BE = 20cm$ và $CE = 28cm$. P là một điểm trên đường chéo BD. Giá trị nhỏ nhất của độ dài $PE + PC$ là bao nhiêu cm?

Ví dụ 1.2. (Dựa theo Đề thi IMO)
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Các điểm M, N, I theo thứ tự di động trên AA', BC, C'D' sao cho A'M=BN=C'I=a ($0 \le a \le 1$).
1) (α) là mặt phẳng qua M, N, I. Chứng minh rằng (α) luôn tự song song;
2) Tính d(A, (α)) (khoảng cách từ A đến (α)) theo a;
3) Tính diện tích tam giác MNI theo a và xác định vị trí điểm M để diện tích đó nhỏ nhất;
4) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MNI thuộc một đường thẳng cố định.

1.2 Một số hướng giải bài toán cực trị hình học

1.2.1 Sử dụng phương pháp véctơ

Một số bài toán cực trị hình học được giải gọn hơn nếu ta biết sử dụng công cụ vectơ thích hợp. Ngoài những kiến thức quen thuộc đã học ở bậc THPT như các tính chất, các phép biến đổi vectơ, bất đẳng thức vectơ và các hệ thức vectơ trong tam giác..., chúng ta cần biết thêm khái niệm và các tính chất của trọng tâm một hệ điểm, công thức Lagrange - Jacobi, tâm tỉ cự của một hệ điểm, định lí "con nhím " cho khối tứ diện...

Định nghĩa 1.1. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_m$ là một hệ m điểm sắp xếp tùy ý trong không gian không phân biệt thứ tự. Điểm G được gọi là trọng tâm của hệ điểm trên nếu có $\sum\limits_{i=1}^{m} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
Dễ thấy trọng tâm một hệ điểm luôn tồn tại và duy nhất. Hơn nữa, nếu G được gọi là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ thì với mọi điểm M trong không gian, có $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \overrightarrow{MA_i}$.

Định lý 1.1 (Công thức Lagrange - Jacobi): Giả sử G là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ và M là một điểm tùy ý trong không gian. Thế thì

$$MG^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} MA_i^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{1 \le i < j \le m} {A_iA_j}^2$$

Ví dụ 1.3. *Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M sao cho* $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ *bé nhất.*

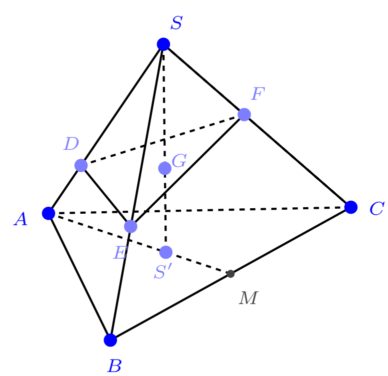
Lời giải.
Gọi I là trung điểm AB, J là trung điểm CD, G là trung điểm IJ.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$
Ta có
$MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$
Tương tự có
$MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$
$MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$
$MD^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 = MG^2 + GD^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GD}$
Suy ra
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$
$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$
hay $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$
Do đó
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với G.
Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bé nhất khi M trùng với G.

Ví dụ 1.4. *Cho tứ diện SABC với $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt SA, SB, SC tương ứng tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}.$$

Lời giải.



Hình 1.1:

Vì G là trọng tâm của tứ diện SABC nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' (hình 1.1) của tam giác ABC và có hệ thức

$$\overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}.\overrightarrow{SS'} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right).$$

Từ đó

$$4\overrightarrow{SG} = \frac{SA}{S\mathrm{D}}.\overrightarrow{S\mathrm{D}} + \frac{SB}{S\mathrm{E}}.\overrightarrow{S\mathrm{E}} + \frac{SC}{S\mathrm{F}}.\overrightarrow{S\mathrm{F}}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SG} = \frac{1}{S\mathrm{D}}.\overrightarrow{S\mathrm{D}} + \frac{1}{S\mathrm{E}}.\overrightarrow{S\mathrm{E}} + \frac{1}{S\mathrm{F}}.\overrightarrow{S\mathrm{F}}.$$

Lại vì bốn điểm D, E, F, G đồng phẳng nên $\frac{1}{4S\mathrm{D}} + \frac{1}{4S\mathrm{E}} + \frac{1}{4S\mathrm{F}} = 1$
Từ đó suy ra

$$\frac{1}{S\mathrm{D}.SE} + \frac{1}{S\mathrm{E}.SF} + \frac{1}{S\mathrm{F}.SD} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{S\mathrm{D}} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF}\right)^2 = \frac{16}{3}.$$

Do đó $minP = \frac{16}{3}$ khi và chỉ khi $SD = SE = SF = \frac{3}{4}$, nghĩa là khi và chỉ khi mặt phẳng (DEF) đi qua G và song song với mặt phẳng (ABC).

1.2.2 Sử dụng phương pháp tọa độ

Để giải bài toán cực trị trong hình học giải tích ta có thể xét chúng trong hệ trục tọa độ afin hoặc hệ tọa độ Descartes vuông góc để giải toán theo các bước sau:
-Bước 1. Thiết lập hệ trục tọa độ thích hợp, từ đó suy ra tọa độ của các điểm cần thiết.
-Bước 2. Thiết lập biểu thức điều kiện (nếu có). Thiết lập biểu thức giải tích cho đối tượng cần tìm cực trị.
-Bước 3. Lựa chọn phương pháp tìm cực trị, thông thường là:

+ Sử dụng đánh giá biểu thức.
+ Phương pháp tam thức bậc hai.
+ Sử dụng bất đẳng thức như BĐT tam giác, BĐT Cauchy,...
+ Sử dụng đạo hàm.

Ví dụ 1.5. *Trong không gian với hệ tọa độ Decasters vuông góc Oxyz cho hai điểm M(3; 1; 1) và N(4;3; 4) và đường thẳng d có phương trình*

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-9}{1}$$

Tìm điểm I thuộc d sao cho IM + IN nhỏ nhất.

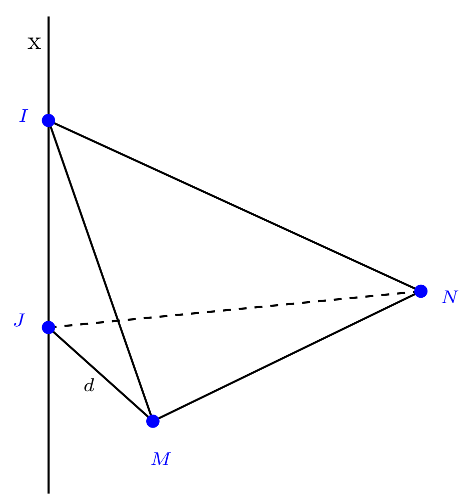
Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2; 3)$; d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1; -2; 1)$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u} = 1.1 + 2.(-2) + 3.1 = 0$, suy ra $MN \perp d$.
Mặt phẳng (P) qua MN vuông góc với d tại I có phương trình:
x - 2y + z - 2 = 0.
Vì I là giao điểm của hai đường thẳng MN và d nên tính được tọa độ của $I\left(\frac{17}{3}; \frac{17}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

Ví dụ 1.6. *Trong không gian với hệ tọa độ Decasters vuông góc Oxyz cho đường thẳng d và các điểm $M(x_1; y_1; z_1); N(x_2; y_2; z_2)$ không thuộc d. Tìm điểm I trên đường thẳng d sao cho IM +IN nhỏ nhất.*

Lời giải.

Trường hợp 1. I, M, N và d nằm trong một mp, khi đó ta thực hiện bài toán trong mp: nếu đoạn MN cắt d thì giao điểm đó chính là điểm I cần tìm. Nếu đoạn MN không cắt d thì lấy M' đối xứng với M qua d khi đó IM=IM'. Ta có $IM + IN = IM' + IN \geq M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M', N thẳng hàng, khi đó IM +IN nhỏ nhất. Từ đó I là giao điểm của M'N và d, suy ra tọa độ điểm I.

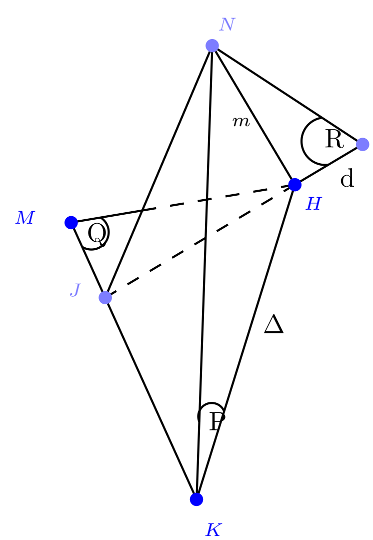
Trường hợp 2. Các đường thẳng MN và d chéo nhau. Có hai khả năng:
a, Nếu $MN \perp d$ thì ta làm như sau:



Hình 1.2:

Gọi (P) là mặt phẳng qua MN vuông góc với d tại J (hình 1.2), khi đó

$MJ \perp d$; $NJ \perp d$ và MJ+NJ=k (không đổi);
Với mọi $I \in d$ thì $IM \geq JM; IN \geq JN$ nên $IM + IN \geq JM + JN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv J$, từ đó tìm được tọa độ điểm I, giao của (P) và d.
b, Nếu MN không vuông góc với d ta chuyển bài toán về mặt phẳng để giải như sau:
- Xác định hình chiếu vuông góc H của N xuống d.
- Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và điểm N; (P) là mặt phẳng qua H vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng chứa d và điểm M; Δ là giao tuyến của (P) và (Q) thì $\Delta \perp d$ tại H. Trên Δ lấy K sao cho KH=NH và K, M nằm về hai phía của mặt phẳng (R) (hình 1.3). Khi đó với mọi $J \in d$ thì $\Delta NJH = \Delta KJH$



Hình 1.3:

$\Rightarrow JK = JN$
$\Rightarrow JM + JN = JM + JK \geq MK$
Đẳng thức xảy ra khi J, M, K thẳng hàng từ đó tìm được tọa độ điểm $I \equiv J$, giao điểm của MK và d, đó là điểm cần tìm.